

文章编号 1004-924X(2008)10-1822-09

经纬仪交会精度的定量预测

刘旨春^{1,2}, 郭立红¹, 关文翠³, 邢忠宝¹

(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所, 吉林 长春 130033;

2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039; 3. 北华大学 物理学院, 吉林 吉林 132013)

摘要: 推导并建立了一系列的公式, 用于定量预测两经纬仪的交会精度。给出了用于目标三维位置估计的基本多传感器三角交会法的公式, 同时利用各个测量误差的泰勒展开式导出了误差传播等式。在测量误差中引入高斯分布, 建立了测量误差标准差和目标位置估计标准差之间的关系式, 给出了交会精度随各单项误差传播系数的变化曲线图。实验结果表明: 目标的 x, y 坐标的估计误差不受站址坐标中 z 坐标误差的影响, 也不受测量高低角的影响, 站址坐标中 z 项误差直接转移到目标的 z 坐标估计误差中。交会角为 90° 时, 交会精度受经纬仪单项差的影响最小, 交会角在 $20\sim 60^\circ$ 时的误差传播系数为 0.079。目标 (x, y) 坐标的交会精度依赖于经纬仪站址的测量精度、方位角的测量精度、经纬仪和目标的距离测量精度及两经纬仪的交会角; 目标 z 坐标的精度依赖于经纬仪到目标的水平投影距离、经纬仪 z 坐标的测量精度和传感器高低角测量精度。最后, 给出了一套等式和图形用于设计一个两经纬仪系统, 使之满足具体的精度要求。本预测方法已成功应用于实际项目中传感器的选型和光学系统的参考设计。

关键词: 经纬仪; 交会测量; 三角测量; 三维位置估计; 多传感器; 误差传播

中图分类号: TH761.1; TP391.4 **文献标识码:** A

Quantitative forecasting of intersection precision for theodolite

LIU Zhi-chun^{1,2}, GUO Li-hong¹, GUAN Wen-cui³, XING Zhong-bao¹

(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China;

2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China;

3. Physics School, Beihua University, Jilin 132013, China)

Abstract: In order to forecast quantitatively the intersection precision of a theodolite, a series of functions were introduced to study the intersection precision measurement. The basic multi-sensor triangulation equations were used to estimate a 3D target position, and the error propagation equations were derived by Taglor extension from various measurement errors. Then, the concept of Gaussian measurement error was introduced to establish the relationship of the standard deviation of various measurement errors with the standard deviation of target 3D position estimation, and the plots of various error propagation coefficients were generated. The results indicate that the estimations of the x, y location errors are independent of any errors, either the sensor z position or the elevation angle in measurement. The errors x and y in the sensor position (x, y) depend only on the azimuth angles be-

收稿日期: 2008-01-03; 修订日期: 2008-03-14.

基金项目: 国家 863 高技术研究发展计划资助项目 (No. 2006AA703104)

tween sensors, and not on the actual sensor (x, y) locations. The errors in the z component of a sensor position can translate directly into equivalent errors in the z component of target position estimation. The optimum geometry for a two-sensor system is in a 90° azimuth separation angle between the two sensors. The target (x, y) position estimation accuracy depends on the accuracies of sensor location measurement, the sensor azimuth pointing measurement and the sensor-to target range, also the sensor-to-sensor azimuth separation geometry. The target z position estimation accuracy depends on the sensor-to-target horizontal range, the sensor z location measurement accuracy and the sensor elevation angle measurement. Intersection errors is the smallest one when the intersection angle is 90° , and the error propagation coefficient is 0.079 when $20^\circ \sim 60^\circ$. Finally a set of equations and graphs useful for designing a two-sensor system was designed to meet the requirement for a required accuracy specification.

Key words: theodolite; intersection measurement; triangulation; 3D position estimation; multi-sensor; error propagation

1 引言

单台经纬仪只能提供目标的角度信息,包括方位角和高低角,只有这两个角度信息并不能定位空间目标的三维位置,所以用经纬仪定位目标的三维位置,需要两台以上的经纬仪联合测量,然后多台交汇处理来得到目标的三维位置^[1-3]。

在靶场广泛应用三角测量法来进行经纬仪的测量数据交汇,尽管三角法的应用很广泛,它的误差传递过程在国内外却很少有文献分析。Guezemec 和 Kiritsis 为了对处理的图像进行三角法的统计性测试,提出了综合图像模型,但最终没有给出传感器原点位置误差对最终交会结果的影响^[4]。在假定传感器位置坐标无误差的情况下,Angus 给出了方位角测量误差对最终交会距离误差的影响,但没有给出高低角测量误差对三角法交会距离误差的影响^[5]。同样 Sanders-Reed 也在假定传感器的坐标是准确的前提下,讨论了三角法的误差传递^[5]。Sridhar 和 Suorsa 比较了两传感器系统交会距离误差和角度测量误差的关系^[6]。他们均假定传感器位置测量是无误差的,误差是由于方向角测量引入的。国内文献中大多描述是定性的,未做定量讨论^[14-16]。本文所做的工作就是对经纬仪站址测量误差,经纬仪测量角度误差,包括方位角和高低角误差对最终目标的三维位置定位误差的影响进行分析。通过本文的分析,可更好地理解传感器到目标的方向角度是如何影响目标交会位置的精确度的^[7]。

通常情况下,两个或更多的传感器放置在已

知坐标 (x, y, z) 的位置上,指向想要测量的目标所在的方向。指向角通常是方位角和高低角。角度的测量有固定的参考平面,例如以方向北为参考。本文的分析专门针对经纬仪。经纬仪中所用传感器多为可见光和红外传感器,成像器件是位于焦平面的阵列。通常情况下,以阵列中心的指向来计算方位角和高低角^[5-7]。

对于只有角度测量信息的传感器,至少需要两个传感器来定位目标的三维位置。对于焦平面阵列传感器,利用三角法来计算目标位置要利用每个传感器所成的目标的像,计算每个图像中目标的位置。

2 3D 位置估计

本章节对经纬仪常用的三角交汇法和常用的符号进行简要的介绍。采用的坐标系如图 1 所示,图中目标位置用下标表示,传感器位置用下标 i 表示。定位目标 3D 位置至少要求两个传感

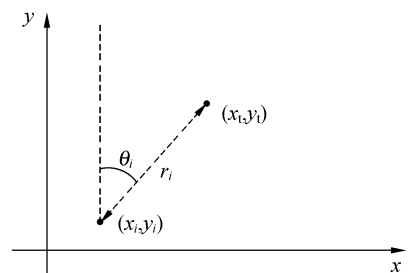


图 1 三角法的三维坐标系(z 轴正向朝向纸外)
Fig. 1 3D triangulation coordinate system (Positive z axis is out of the paper)

器,如果超过两个传感器,问题就是过约束的,成为最小均方问题^[8]。

目标位置定义为 (x_t, y_t, z_t) 。传感器定义包括位置和指向角,传感器位置定义为 (x_i, y_i, z_i) ,方位角是 θ_i ,高低角是 φ_i ,方位角以 y 轴的正轴起始,顺时针方向旋转,范围从 0 到 2π 弧度。高低角测量从 $x-y$ 平面起始,值从 $-\pi$ 到 π 。从传感器 i 到目标距离的 $x-y$ 平面投影是 r_i ^[7-13]。

方位角和目标及传感器的坐标关系由下式决定:

$$\tan \theta_i = \frac{x_i - x_t}{y_i - y_t}, \quad (1)$$

目标 z 坐标和传感器 z 坐标、俯仰角、 $x-y$ 平面投影距离 r_i 之间的关系由下式决定:

$$z_t = r_i \tan \varphi_i + z_i, \quad (2)$$

其中:

$$r_i = [(x_i - x_t)^2 + (y_i - y_t)^2]^{1/2}, \quad (3)$$

对于 N 个传感器的情况,均方差矩阵写为:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ x_i - y_i \tan \theta_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ 1 & -\tan \theta_i \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}, \quad (4)$$

若要计算 z_t ,本文只需计算每个传感器的值,然后平均这些值。

$$\langle z_t \rangle = \langle r_i \tan \varphi_i + z_i \rangle, \quad (5)$$

对于两传感器的情况,可以显式地表示等式(1),运用下标 1 和 2 来表示两传感器,由此得到下式:

$$x_t = [x_2 \tan \theta_1 - x_1 \tan \theta_2 + (y_1 - y_2) \times$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_t}{\partial x_1} = -\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}, \frac{\partial x_t}{\partial x_2} = -\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} \\ \frac{\partial x_t}{\partial y_1} = -\frac{\tan \theta_1 \tan \theta_2}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}, \frac{\partial x_t}{\partial y_2} = -\frac{\tan \theta_1 \tan \theta_2}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} \\ \frac{\partial x_t}{\partial \theta_1} = \left[\frac{x_2 + (y_1 - y_2) \tan \theta_2}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} - \frac{x_2 \tan \theta_1 - x_1 \tan \theta_2 + (y_1 - y_2) \tan \theta_1 \tan \theta_2}{(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2} \right] \times \sec^2 \theta_1 \\ \frac{\partial x_t}{\partial \theta_2} = \left[\frac{-x_1 + (y_1 - y_2) \tan \theta_1}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} + \frac{x_2 \tan \theta_1 - x_1 \tan \theta_2 + (y_1 - y_2) \tan \theta_1 \tan \theta_2}{(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2} \right] \times \sec^2 \theta_2 \end{cases}, \quad (9)$$

后面的两个等式也可利用等式 $\sec \theta = 1/\cos \theta$ 和 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ 来重写,重要的是,要注意到 $\partial x_t / \partial x_1 + \partial x_t / \partial x_2 = 1, \partial x_t / \partial y_1 + \partial x_t / \partial y_2 = 0$ 。由此可以看出,单一的误差系数是受站址坐标影响的,而由于误差系数相加的和是一定的,没有影响。也就是说通过选取合适的坐标能够减小三角法对传感器 1 的 x 坐标的敏感度,但这是以增加对站址 2 的 x 坐标误差的敏感度为代价的。在实际项目中可根据实际情况调整这两个系数的大小

$$\tan \theta_1 \tan \theta_2] \times (\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^{-1}, \quad (6)$$

$$y_t = (y_1 \tan \theta_1 - y_2 \tan \theta_2 + x_2 - x_1)$$

$$(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^{-2}, \quad (7)$$

式(6)、(7)只对两传感器的情况有效。多于两传感器时,式(4)是最简方案。

3 两传感器交会时的误差传递

本文推导了两传感器时的误差传递等式。首先在给定站址测量误差和经纬仪测角误差的情况下,推导出目标定位基本的误差传播等式组,然后再讨论测量值具有高斯随机误差的情况^[7]。

为了得到式(6)中各参数测量值和估计值 x_t 之间的联系,本文就 x_t 进行泰勒级数展开,只保留一阶项,关于 x_t 的误差传播方程写为:

$$\delta x_t \approx \frac{\partial x_t}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial x_t}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial x_t}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial x_t}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial x_t}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial x_t}{\partial \theta_2} \delta \theta_2, \quad (8)$$

考虑到测量误差较小,可忽略高阶项。本文称之为—阶误差传播等式,是因为它描述了交会结果和每一个测量元素误差之间的依赖关系。 x_t 随 x_1 的测量误差而变化,通过误差系数项 $\partial x_t / \partial x_1$ 表现出来。下式表明, x_t 的误差系数依赖于目标相对两个传感器的方位角正切值之差 $\tan \theta_1 - \tan \theta_2$ 和 $\tan \theta_2$ 的比值。

各测量元素的误差系数项如下式所示:

尽可能降低总的误差。

对式(7)进行相似的泰勒级数展开,并只保留—阶项,得到关于 y_t 的—阶项误差传递等式。

$$\delta y_t \approx \frac{\partial y_t}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial y_t}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial y_t}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial y_t}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial y_t}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial y_t}{\partial \theta_2} \delta \theta_2, \quad (10)$$

各项系数如下所示:

$$\begin{cases} \frac{\partial y_t}{\partial y_1} = -\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}, \frac{\partial y_t}{\partial y_2} = -\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} \\ \frac{\partial y_t}{\partial x_1} = \frac{-1}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}, \frac{\partial y_t}{\partial x_2} = \frac{1}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} \\ \frac{\partial y_t}{\partial \theta_1} = \left[\frac{y_1}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} - \frac{y_1 \tan \theta_1 - y_2 \tan \theta_2 + x_2 - x_1}{(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2} \right] \times \sec^2 \theta_1 \\ \frac{\partial y_t}{\partial \theta_2} = \left[\frac{-y_2}{\tan \theta_1 - \tan \theta_2} + \frac{y_1 \tan \theta_1 - y_2 \tan \theta_2 + x_2 - x_1}{(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)^2} \right] \times \sec^2 \theta_2 \end{cases}, \quad (11)$$

同样满足以下两式: $\partial y_t / \partial x_1 + \partial y_t / \partial x_2 = 0$, 和 $\partial y_t / \partial y_1 + \partial y_t / \partial y_2 = 1$ 。对于水平投影距离 r_i , 在传感器 i 和目标 t 之间的距离可由下式给出,

$$\delta r_i \approx \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial r_i}{\partial x_t} \delta x_t + \frac{\partial r_i}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial r_i}{\partial y_t} \delta y_t, \quad (12)$$

对于 ∂x_t 和 ∂y_t , 带入式(8)和(10), 得到

$$\begin{aligned} \delta r_i \approx & \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial r_i}{\partial x_t} \left(\frac{\partial x_t}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial x_t}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial x_t}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial x_t}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial x_t}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial x_t}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 \right) + \\ & \frac{\partial r_i}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial r_i}{\partial y_t} \left(\frac{\partial y_t}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial y_t}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial y_t}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial y_t}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial y_t}{\partial \theta_1} \delta \theta_1 + \frac{\partial y_t}{\partial \theta_2} \delta \theta_2 \right), \end{aligned} \quad (13)$$

其余必须要处理的项如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial r_i}{\partial x_i} = \frac{x_i - x_t}{\sqrt{(x_i - x_t)^2 + (y_i - y_t)^2}} \\ \frac{\partial r_i}{\partial x_t} = -\frac{x_i - x_t}{\sqrt{(x_i - x_t)^2 + (y_i - y_t)^2}} \\ \frac{\partial r_i}{\partial y_i} = \frac{y_i - y_t}{\sqrt{(x_i - x_t)^2 + (y_i - y_t)^2}} \\ \frac{\partial r_i}{\partial y_t} = -\frac{y_i - y_t}{\sqrt{(x_i - x_t)^2 + (y_i - y_t)^2}} \end{cases}, \quad (14)$$

运用式(9)、(10)、(14)可以得出误差传播等式(12), 在传感器 i 和目标 t 之间的 $x-y$ 平面的投影距离, 等式过长没有列出。

用式(2)写目标的 z_t 坐标的一阶误差传播等式:

$$\delta z_t \approx \frac{\partial z_t}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial z_t}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial z_t}{\partial z_i} \delta z_i, \quad (15)$$

已经计算了 δr_i , 对于其余的两项, 有:

$$\frac{\partial z_t}{\partial r_i} = \tan \varphi_i, \frac{\partial z_t}{\partial \varphi_i} = r_i \sec^2 \varphi_i, \frac{\partial z_t}{\partial z_i} = 1. \quad (16)$$

至此已经得到所有的误差传播等式, 分别对应 x_t, y_t, z_t, r_i , 这些量的推导要求计算等式(9)、(11)、(14)、(16)。这些参数很容易用计算机编程来计算, 从而得到目标和传感器之间的几何关系。

从上面的等式, 可以得出测量误差传递的几个规律:

(1) 由式(4)、(6)、(7)可以得出, 目标 x_t 和 y_t 坐标的估计误差不受传感器的站址坐标中 z_i

坐标的误差影响, 也不受测量高低角 φ_i 的影响。

(2) x_t 和 y_t 中源于传感器坐标 (x_i, y_i) 的误差, 只受测量方位角的影响, 主要是以目标为顶点的两个传感器之间的交会角度, 和具体的传感器位置坐标无关。

(3) 在关于 δx_t 和 δy_t 的传递关系式中(式(9)和(10)), 各分项的分母中都包含有 $(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)$ 项, 那么当这 2 个正切值相等时, $\theta_1 = \theta_2 + k\pi$, 其中 k 为整数。差值为零, 误差传播系数变为无穷大。实际测量中只能有两种情况发生, $\theta_1 = \theta_2$ 和 $\theta_1 = \theta_2 + \pi$ 。

(4) 站址坐标中 z 项的测量误差, 最终直接等值转移到估计值中 z 项的误差(式[16])。

4 单项差具有白噪声特性时的误差传递

式(8)描述了误差的传递从每个测量元素到最终估计值 x_t 的传播过程, 一般测量误差服从高斯分布。在这种情况下, 得到估计目标位置 x_t 的标准差, 通过对式(8)取平方, 得到期望值, 最终得到平方根, 这里假定各误差项是不相关的。

$$\delta x_t = \left[\left(\frac{\partial x_t}{\partial x_1} \sigma_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial x_2} \sigma_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_1} \sigma_{y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_2} \sigma_{y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta_1} \sigma_{\theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta_2} \sigma_{\theta_2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (17)$$

其中, δ_a 是变量 a 的测量误差的标准差。通常认为相互独立的变量是不相关的,但并不总是具有相同的符号,因此可直接将等式扩展到两变量相关的情况。如果两变量 v_1 和 v_2 是相关的,那么交叉项的期望值 $\rho\sigma_{v_1}\sigma_{v_2}$ (其中 $-1 \leq \rho \leq 1$) 是非零的,那么在均方根中将出现形式为 $2(\partial x_t/\partial v_1) \times (\partial x_t/\partial v_2)\rho\sigma_{v_1}\sigma_{v_2}$ 的附加项。

$$\sigma_{r_i}^2 \approx \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_{y_i}^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_t} \right)^2 \times \left[\left(\frac{\partial x_t}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_1} \right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_2} \right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta_1} \right)^2 \sigma_{\theta_1}^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta_2} \right)^2 \sigma_{\theta_2}^2 \right] + \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_t} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial y_t}{\partial y_1} \right)^2 \sigma_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial y_2} \right)^2 \sigma_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_1} \right)^2 \sigma_{\theta_1}^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_2} \right)^2 \sigma_{\theta_2}^2 \right], \quad (19)$$

最后式(15)给出(其中 $\partial z_t/\partial z_i = 1$):

$$\sigma_{z_t} \approx \left[\left(\frac{\partial z_t}{\partial r_i} \right)^2 \sigma_{r_i}^2 + \left(\frac{\partial z_t}{\partial \varphi_i} \right)^2 \sigma_{\varphi_i}^2 + \sigma_{z_i}^2 \right]^{1/2}, \quad (20)$$

本文进一步假定传感器 1 和传感器 2 测量误差的标准差是相互独立的,并是相等的。进一步

$$\sigma_{x_i} \approx \left\{ \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right)^2 \right] \sigma_{\text{pos}}^2 + \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] \sigma_{\theta}^2 \right\}^{1/2}, \quad (22)$$

$$\sigma_{y_i} \approx \left\{ \left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_2} \right)^2 \right] \sigma_{\text{pos}}^2 + \left[\left(\frac{\partial y_i}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] \sigma_{\theta}^2 \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

$$\sigma_{r_i}^2 \approx \left\{ \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_t} \right)^2 \times \left[\left(\frac{\partial x_t}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial y_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_t} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial y_t}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} \sigma_{\text{pos}}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_t} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial r_i}{\partial y_t} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_2} \right)^2 \right] \right\} \sigma_{\theta}^2, \quad (24)$$

式(20)对于 z_t 中来自于单个传感器的误差提供了一个估计。既然有两个传感器,先计算单个传感器 z_i 估计,然后采用加权来取平均,权值由标准差给出,来获得 z_t 的最佳估计。因为两个传感器的估计值 z_i 依赖于两个传感器的位置和目标的方向角和高低角,误差估计变为:

$$\langle \sigma_{z_t} \rangle = \frac{1}{2} \left[\sigma_{z_t}^2(1) + \sigma_{z_t}^2(2) + 2 \frac{\partial z_t}{\partial r_1} \frac{\partial z_t}{\partial r_2} \text{Cov}(\delta r_1, \delta r_2) \right]^{1/2}, \quad (25)$$

其中, $\sigma_{z_t}(1)$ 是由式(20)获得传感器 1 的 z_t 标准差, $\sigma_{z_t}(2)$ 是对应传感器 2 的 z_t 标准差。两个变

同样,由式(10)能够得到 y_t 的估计误差标准差的估计:

$$\delta_{y_t} = \left[\left(\frac{\partial y_t}{\partial x_1} \sigma_{x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial x_2} \sigma_{x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial y_1} \sigma_{y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial y_2} \sigma_{y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_1} \sigma_{\theta_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y_t}{\partial \theta_2} \sigma_{\theta_2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (18)$$

由式(13)得到:

假定没有方向性,也就是 x 方向和 y 方向有相同的标准差。这两个假定可以写为:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} \equiv \sigma_{\text{pos}}, \sigma_{\theta_1} = \sigma_{\theta_2} \equiv \sigma_{\theta}, \quad (21)$$

采用这些假定可以重新写式(17)、(18)、(19)如下(式(20)不变):

分式可由式(16)做各自的高低角的正切变换得到。而 $\text{Cov}(\delta r_1, \delta r_2)$ 可作为 $\langle \delta r_1 \delta r_2 \rangle$ 的内积的期望值,经过变换后,可以得到:

$$\text{Cov}(\delta r_1, \delta r_2) = \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \sigma_{x_1}^2 + \frac{\partial r_1}{\partial y_1} \frac{\partial r_2}{\partial y_1} \sigma_{y_1}^2, \quad (26)$$

变分项由式(14)给出,标准差的表示由式(22)和(23)给出。式(20)~(26)是最终误差传播等式联系本文的测量误差和最终的目标位置估计误差。对于一个两传感器系统,可以运用式(3)、(5)和(7)来计算目标位置的估计。再用式(20)~(26)来提供那些值的误差估计。

5 实 验

本章节定量考察传感器的位置和指向角对目标位置估计的影响。由此本文考察传感器位置误差(σ_{pos})系数、传感器方位误差(σ_{θ})系数在目标位置(x_t, y_t)的等式中,传感器到目标投影距离 r_i 的影响,考察传感器高低角对于目标 z_t 位置估计的影响。最终得出对误差的大小起决定作用的是传感器交会角 $\theta_1 - \theta_2$ 、目标的距离、传感器高低角这 3 项参数。为了计算这些系数,对式(9)、(11)、(14)、(16)用程序编码,把计算机计算输出的结果和手动计算的结果进行了比较来确定计算机计算的精确度。当一个已知误差被引入式(2)、(4)、(6)和(7)时,比较真值和计算值之间的差异。一个更重要的检测是画各个分项对的曲线,比如($\partial x_t / \partial x_1 + \partial x_t / \partial x_2$),在不同的交会角时,检查它们的值是否为常量。

在确定程序输出的正确性后,绘制误差曲线。按以下方法进行实验:

(1) 假设目标坐标 $x_t = 50, y_t = 100, z_t = 2$, 即:(50,100,2)。传感器 1 的方位角 θ_1 , 水平投影 r_1, z 坐标是 z_1 , 空间距离是 5 个单位。由以上信息可得出传感器 1 的坐标(x_1, y_1)和目标的高低角 φ_1 。

(2) 传感器 2 和传感器 1 具有相同的水平投影,但坐标点绕目标以步长 1° 转动,以便交会角在 1° 和 179° 之间变化,并在每一点计算误差传播系数。

(3) 传感器 1 方位角取不同的值,在每一取值,传感器 1 固定,传感器 2 重复(2)的动作。 σ_{pos} 测量误差系数单位是传感器位置误差为一个标准单位位置误差和标准单位的比值。 σ_{θ} 测量误差系数单位是单位每度。

在给定距离和到目标的方位角时,为了得到每一个传感器的(x, y)坐标。式(1)和(3)引入 $\Delta x = |x_t - x_i|$ 和 $\Delta y = |y_t - y_i|$ 。结果是:

$$\Delta y_i = \left(\frac{r_i^2}{\tan^2 \theta_i + 1} \right)^{1/2},$$

$$\Delta x_i = (r_i^2 - \Delta y_i^2)^{1/2},$$

$$\tan \varphi_i = \frac{\Delta z_i}{r_i}.$$

本文给出了误差传播系数相对交会角变化的图形。应用 4 个传感器产生了 6 个传感器对,所有 4 个传感器和目标的距离是 5 个标准单

位。传感器 1 有 40° 方位角,传感器 2 有 50° 方位角,传感器 3 有 130° 方位角,传感器 4 有 140° 方位角。也就是说,两个传感器对有 10° 交会角,一对有 80° 交会角。两对有 90° 交会角,一对有 100° 交会角。

用式(6)、(7)、(3)计算了目标 $x-y$ 坐标,传感器 1 到目标距离具有高斯分布测量误差。计算了目标 $x-y$ 位置估计的标准差和传感器 1 到目标的距离估计,用于每个传感器对,比较了预测分析和图形。

6 误差传播图形

本文考察了等式(22)和(23)中 σ_{pos} 和 σ_{θ} 系数的变化。图 2~5 显示了系数的曲线图,横坐标为交会角($\theta_1 - \theta_2$),纵坐标是误差系数。由式(9)和(11)可以看出,这些系数不仅依赖于传感器之间的交会角,而且和各自方位角的值有关。这里考察不同的固定的传感器 1 方位角 θ_1 和不断变化的方位角 θ_2 。

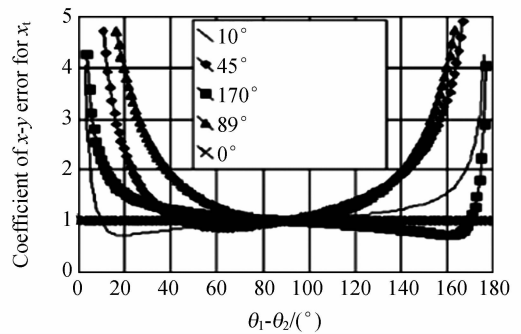


图 2 式(22)中 σ_{pos} 的系数曲线,其每条曲线对应一个 θ_1 值

Fig. 2 Coefficient curves of σ_{pos} in Eq. (22) for various values of sensor 1 at azimuth angle θ_1 .

图 2 和 3 为 x 和 y 目标位置估计相对于传感器位置测量误差的系数图,可以看到如预测所估,作为交会角的函数,它们是相同的,两个图形在 θ_1 角有 90° 偏移。两图的误差系数出现在交会角为 90° 时,误差系数变化从 90° 时的 1:1 到 20° 和 160° 差角时的 4:1。

图 4 和 5 为 x 和 y 目标位置估计的敏感度相对于传感器方位角测量误差系数图,如预测所估,作为交会角的函数,它们是同样的,两图形 θ_1 角有 90° 偏移。在方位角为 90° 时误差系数最小,目

标位置误差系数从 90° 的 $0.087 : 1$ 到 20° 和 160° 的 $0.35 : 1$ 。这意味着交会角是 90° 时, 1° 的方位角测量误差将导致 0.087 个单位的目标位置误差。

由式(9)、(11)、(22)、(23)可看出, σ_{pos} 的误差系数不依赖于传感器位置, 因此和距离无关; 而 σ_θ 依赖于传感器位置, 故与距离有关。对于等式(22)和(23)中 σ_θ 的系数, 在距离 $2r$ 时, 是距离为 r 时系数的两倍。 σ_θ 系数的点图(图 4 和 5)用于 5 单元距离, 在距离变化的情况下, 乘相应倍数即可。

传感器到目标距离误差影响对目标位置 z 坐标的估计精确度。式(24)描述了传感器位置和方位角测量误差如何影响传感器到目标距离。 σ_{pos} 的系数独立于目标到传感器的距离, 也独立于绝对角度, 只依赖于交会角。 σ_θ 的系数也独立于绝对角, 直接线性放大。图 6 显示了 σ_θ 的曲线图。

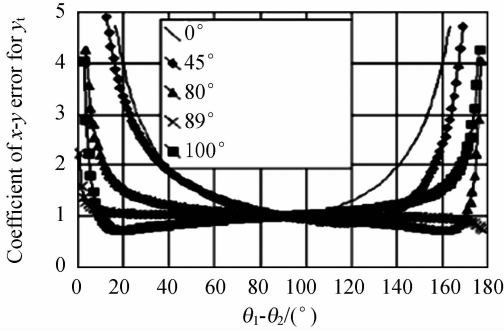


图 3 式(23)中 σ_{pos} 的系数曲线, 每条曲线对应一个 θ_1 值。

Fig. 3 Coefficient curves of σ_{pos} in Eq. (23) for various values of sensor 1 at azimuth angle θ_1 .

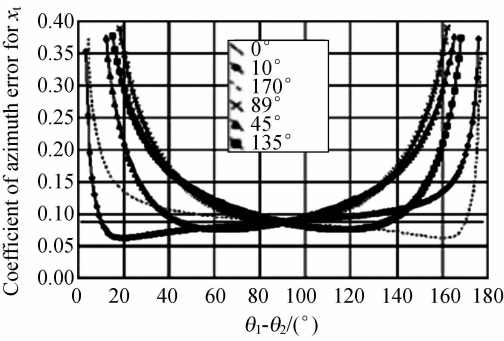


图 4 式(22)中 σ_θ 系数曲线, 每条曲线对应一个 θ_1 角。

Fig. 4 Coefficient curves of σ_θ in Eq. (22) for various values of sensor 1 at azimuth angle θ_1

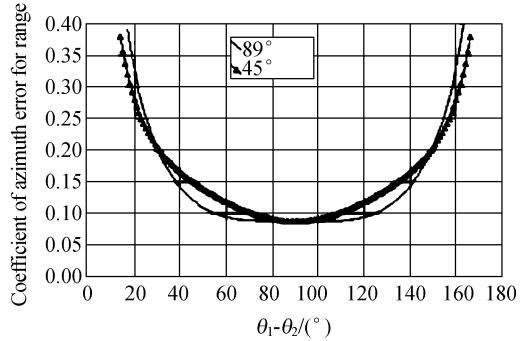


图 6 等式(24)中 σ_θ 的误差系数曲线

Fig. 6 Error coefficient curves of σ_θ in Eq. (24)

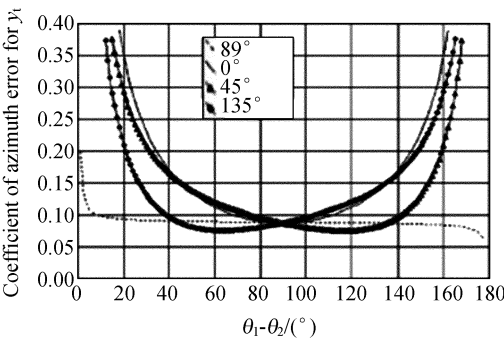


图 5 式(23)中的 σ_θ 系数曲线, 不同的曲线对应不同的 θ_1 角。

Fig. 5 Coefficient curves of σ_θ in Eq. (23) for various values of sensor 1 at azimuth angle θ_1

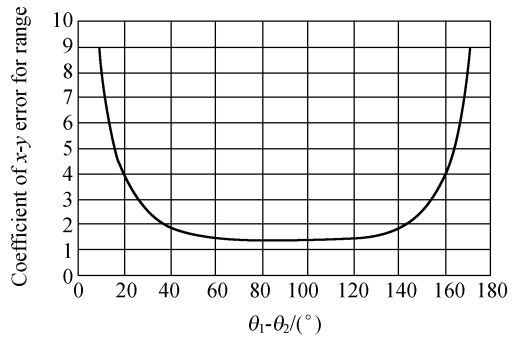


图 7 等式(24)中 σ_{pos} 的系数曲线

Fig. 7 Coefficient curve of σ_{pos} in Eq. (24)

从图 7 可以看到较大范围的变化, $60 \sim 120^\circ$ 时, 最小敏感度是 $1.4 : 1$, $20 \sim 160^\circ$ 时, 增加到

4 : 1。由图 6 看到距离误差的敏感度对方位测量误差的敏感度变化在 90° 差角为 0.087 : 1。0.33 距离单位每度的方位角差在差角 20° 和 160° (在 5 单位距离)。

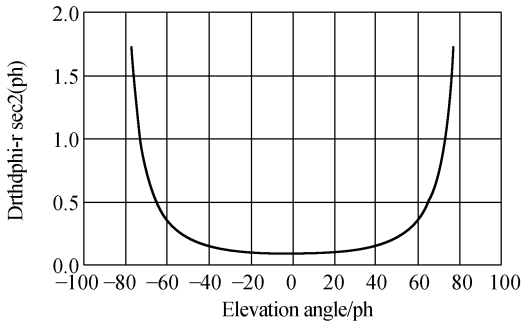


图 8 等式(20)中 σ_φ 的系数曲线(传感器到目标的距离是 5)

Fig. 8 Coefficient curve of σ_φ in Eq. (20) (sensor-to-target range is 5 units)

式(20)中 σ_r 和 σ_φ 系数如等式(16)所示, σ_φ 的系数是 $\partial z_i / \partial \varphi_i = r_i \sec^2 \varphi_i$ 。曲线如图 8 所示。表 1 和 2 给出了位置测量误差标准差为 1 和角度测量误差标准差为 1.0° 时的位置估计标准差。

表 1 目标位置估计误差表(传感器位置标准差是 1.0 单位)

Tab.1 Sensor position measurement errors (standard deviation = 1.0 unit)

传感器	方位角(°)	σ_x	σ_y	σ_r
1,2	40,50	5.74	5.73	5.70
1,3	40,130	1.00	0.96	1.41
1,4	40,140	0.93	1.08	1.50
2,3	50,130	1.07	0.90	1.44
2,4	50,140	0.99	0.99	1.43
3,4	130,140	5.68	5.66	5.65

表 2 目标位置估计误差表(角度测量标准差是 1.0°)

Tab.2 Sensor azimuth measurement error (standard deviation = 1.0°)

传感器	方位角(°)	σ_x	σ_y	σ_r
1,2	40,50	0.555	0.555	0.780
1,3	40,130	0.087	0.088	0.088
1,4	40,140	0.079	0.097	0.091
2,3	50,130	0.095	0.081	0.090
2,4	50,140	0.086	0.089	0.088
3,4	130,140	0.554	0.551	0.776

用于估计三维目标位置 (x, y, z) 的方程由 2.1 给出。对于 N 个传感器问题, 目标 (x, y) 位置能够采用式(4)来估计, 两传感器时采用式(6)和(7), 从这个结果能估计出水平面上传感器到目标距离, 对于每个传感器, 运用式(3)来估计, 最终采用式(5)来估计目标 z 位置。

7 应用

本文对得出的结论在实际工作中的应用做了讨论。对于近距离的碰撞实验, 设想测量一个三维位置, 其精确度为 5 mm, 目标到传感器的距离为 4 m。假定交会角是 40°, 如果传感器 1 有 45° 方位角, 目标 x 位置相对于传感器位置误差系数是 1.11; y 坐标误差系数是 1.90; 方位角误差系数是 $0.097 \times 4/5 = 0.078 \text{ m}/(^{\circ})$, 高低角是 $0.166 \times 4/5 = 0.133 \text{ m}/(^{\circ})$ 。比率 4/5 把本文中的 5 单位距离转为本例中的 4 m。如果把位置测量误差和方位测量误差等分, 各自为 2.5 mm 误差, 那么需要测量传感器位置精确到 1.3 mm ($2.5 \text{ mm}/1.90$), 角度测量精确到 $0.02^{\circ} = 0.35 \text{ mrad}$ [$(0.0025 \text{ m}) / (0.133 \text{ m}/(^{\circ}))$]。如果运用一个 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的传感器, 具有 20° 的视角范围, 那么脱靶量纲为 0.04° 。也就是说测量目标位置要优于 $1/2 \text{ pixel}$ 。上述的传感器的位置和指向角只在精确要求目标 3D 位置时是必须的; 而只计算视场内目标的相对位置关系时是不需要的, 只要求脱靶量的量纲。

如果目标相对传感器较远, 典型的精确度可能是 5 km 的距离精确度为 2 m, 假定 $512 \text{ pixel} \times 512 \text{ pixel}$ 的传感器有 0.25° 的视场, 每个像素 $8.5 \mu\text{rad}$, 并假定交会角为 90° , 传感器位置测量误差系数为 1.0, 方位角测量误差系数为 $0.087 \times (5/5) = 0.087 \text{ km}/(^{\circ})$ 。再一次等分传感器位置和方位角误差, 可以看到传感器位置误差要求在 1 m 以内(差分 GPS 定位技术)。方位角的精确度是 $(1 \text{ m} / (87 \text{ m}/(^{\circ}))) = 0.01^{\circ} = 17 \mu\text{rad}$ 。目标 z 位置的估计依赖于传感器 z 坐标测量、高低角测量、传感器到目标的半径。如果假定高低角为 40° , 高低角误差系数为 $0.2 \text{ km}/(^{\circ})$, 则高低角测量误差 $\leq 0.005^{\circ}$, 才可得到 1 m 精确度。

8 结 论

本文推出了采用三角法进行经纬仪交会定位目标三维位置测量时的误差传播等式。结果表明,在交会角为 90° 时,误差最小,交会角在 $60 \sim 100^\circ$ 时,误差系数变化较小, $<20^\circ$ 或 $>140^\circ$ 时急剧变大,所以交会时应尽量选择交会角在 $60 \sim 100^\circ$ 。目标的 (x, y) 坐标的估计精度依赖于经纬仪站址的测量精度、经纬仪方位角测量精度及传

感器和目标的距离及两经纬仪的交会角。目标 z 坐标的精度依赖于传感器到目标的水平投影距离、传感器 z 坐标的测量精度和传感器高低角测量精度。

本文中给出的等式和图形为适用的工具,可用于设计一个两传感器的三维位置估计系统,以获取一个期望的精度级别,也可以用来估计一个已存在系统的精确度,在实际系统设计中已得到应用,效果很好。

参考文献:

- [1] MANOLAKIS D E. Efficient solution and performance analysis of 3-D position estimation by trilateration[J]. *IEEE*, 1996, 32(4):1239-1248.
- [2] MANOLAKIS D E, COX M E. Effect in range difference position estimation due to stations position errors[J]. *IEEE*, 1998, 34(1):329-334.
- [3] HARRIS H C, DAHN C C, MONET D G. Trigonometric parallaxes of planetary-nebulae[J]. *IAU Symp*, 1997, 180:40-45.
- [4] GUEZENNEC Y G, KIRITSIS N. Statistical investigation of errors in particle image velocimetry[J]. *Exp. Fluids*, 1990:138-146.
- [5] ANGUS J E. Some consequences of sensor error in a model for passive detection[J]. *Math. Comput. Modell*, 1993, 18(2):1-7.
- [6] SANDERS-REED J N. Vehicle real-time attitude estimation system (VRAES)[J]. *SPIE*, 1996, 2739:266-277.
- [7] SRIDHAR B, SUORSA R. Comparison of motion and stereo methods in passive ranging systems[J]. *IEEE*, 1991, 27(4):741-746.
- [8] DAHN C C. Review of CCD parallax measurements[J]. *IAU Symp*, 1997, 189:19-24.
- [9] MAKAROV V V. Absolute measurements of trigonometric parallaxes with astrometric satellites[J]. *Astron. Astrophys*, 1998, 340(1):309-314.
- [10] RATCLIFF S J, BALONEK T J, MARSCHALL L A.. The measurement of astronomical parallaxes with CCD imaging cameras on small telescopes[J]. *Am. J. Phys*, 1993, 61(3):208-216.
- [11] HOLLISTER F H. Bearings-only passive ranging using Kalman-Bucy and Moore-Penrose methods[J]. *SPIE*, 1981, 302:152-157.
- [12] GUERCI J R, GOETZ R A, DIMODICA J. A method for improving extended Kalman filter performance for angle-only passive ranging[J]. *IEEE*, 1994, 30(4):1090-1093.
- [13] KAGIWADA H H, KAGIWADA J K, KALABA R. E. Precision passive ranging[J]. *Comput. Math. Appl*, 1993, 26(4):89-96.
- [14] 高策, 乔彦峰. 光电经纬仪测量误差的实时修正[J]. *光学 精密工程*, 2007, 15(6):846-850.
GAO C, QIAO Y F. Real-time error-correction method for photoelectrical theodolite[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(6):846-850. (in Chinese)
- [15] 刘兴法, 马佳光. 用于三轴光电跟踪系统的神经网络误差修正方法[J]. *光学 精密工程*, 2007, 15(9):1311-1315.
LIU X F, MA J G. Neural network error modification method for three-axis photoelectric tracking system[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(9):1311-1315. (in Chinese)
- [16] 吴国俊, 闫亚东, 仓玉萍, 等. 基于误差修正的同轴度测量方法[J]. *光学 精密工程*, 2007, 15(11):1712-1716.
WU G J, YAN Y D, CANG Y P, *et al.*. Coaxiality measurement method based on revising aberration[J]. *Opt. Precision Eng.*, 2007, 15(11):1712-1716. (in Chinese)

作者简介:刘旨春(1974—),男,吉林长春人,副研究员,博士研究生,主要研究方向为视频判读和数据处理。E-mail: liu357cn@yahoo.com.cn

通讯作者:郭立红(1964—),女,吉林舒兰人,研究员,主要研究作为计算机应用。

导师简介:邢忠宝(1943—),男,吉林长春人,研究员,主要研究作为靶场光电经纬仪总体设计。